色付きジョーンズ多項式の tail と q -級数

湯淺亘

京都大学数理解析研究所 (日本学術振興会特別研究員 PD)
This work was supported by KAKENHI(19K14528, 19J00252)

Friday Tea Time Zoom Seminar, (November 13, 2020)

1. tail に関するこれまでの主な結果
2. 結び目の量子不変量と線形スケイン理論
3. 線形スケイン理論による Braiding の分解公式
4. 結び目の tail から q-級数の恒等式を得る処方箋

色付きジョーンズ多項式

- 色付きジョーンズ多項式とは

> Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $(n+1)$-次元の既約表現 V_{n+1} に対して定義される結び目, 絡み目の" 多項式" に値を取る不変量の族 $\{J_K^{\mathfrak{sl}_2}(n)\}_n$. ($J_{K,n}^{\mathfrak{sl}_2}(q)$ と書いたりもする.)

Remark

- 色付きジョーンズ多項式 $\{J_K^{\mathfrak{sl}_2}(n)\}_n$ は $q^{\frac{\bullet}{2}}\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ に値を取る.
- V_2 から得られる色付きジョーンズ多項式 $J_K^{\mathfrak{sl}_2}(1)$ がジョーンズ多項式.

色付きジョーンズ多項式 $J_K^{\mathfrak{sl}_2}(n)$ に $\pm q^{\frac{\bullet}{2}}$ をかけて q-多項式に正規化した不変量

$$\hat{J}_K^{\mathfrak{sl}_2}(n) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots, \quad (a_0 > 0)$$

を考える事が出来る.

- 色付きジョーンズ多項式の $\mathfrak{sl}_2$-**tail** とは

> 極限"$\lim_{n\to\infty} \hat{J}_K^{\mathfrak{sl}_2}(n)$" として得られる形式的冪級数 $\mathcal{T}_K^{\mathfrak{sl}_2}(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$.

色付きジョーンズ多項式の係数の安定性

■ **Theorem ([Armond, 2013])** L を adequate link とする．このとき，形式的 q-級数 $\mathcal{T}_L^{\mathfrak{sl}_2}(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ が存在して，$\mathcal{T}_L^{\mathfrak{sl}_2}(q) - \hat{J}_{L,n}^{\mathfrak{sl}_2}(q) \in q^{n+1}\mathbb{Z}[[q]]$.

■ **Theorem ([Garoufalidis-Lê, 2015])** L を交代絡み目とする．このとき，任意の非負整数 k に対して $\{\hat{J}_{K,n}^{\mathfrak{sl}_2}(q)\}_n$ は k-stable. (0-stable $\iff$ tail の存在)

■ **Example** 8 の字結び目の色付きジョーンズ多項式の係数の表

$n=2$	1	-1	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0
$n=3$	1	-1	-1	0	0	3	-1	-1	-1	-1	5	-1	-2	-2	-1	6
$n=4$	1	-1	-1	0	0	1	2	0	-2	-1	-1	1	3	1	-2	-3
$n=\infty$	1	-1	-1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1

引き算 & 左に n シフト

$n=2$	0	0	2	-1	-2	-1	3	0	-3	0	4	0	-2	1		
$n=3$	0	0	2	-1	-2	-1	-1	5	-1	-1	-2	-1	7			
$n=4$	0	0	2	-1	-2	-1	-1	1	4	1	-2	-2				
$n=\infty$	0	0	2	-1	-2	-1	-1	1	.	.	.	.	.	.		

- 色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式 (結び目の量子 $(\mathfrak{g}, V_\lambda)$ 不変量)

> 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の最高ウェイト λ を持つ既約表現 V_λ に対して定義される結び目 (絡み目) の不変量の族 $\{J_K^{\mathfrak{g}}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Example $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ とすると, $(k, l) \in \Lambda = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して $J_K^{\mathfrak{sl}_3}(k, l)$ が定義される. 特に, $\{J_K^{\mathfrak{sl}_3}(k, 0)\}$ を一行色付き $\mathfrak{sl}_3$ ジョーンズ多項式と呼ぶ.

Theorem (Integrality theorem [Lê, 2000])

$$J_K^{\mathfrak{g}}(\lambda) \in q^{\frac{\bullet}{2}}\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$$

Remark

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 以外での" 非自明" な結び目に対する色付きジョーンズ多項式の明示式はほとんど知られていない.
- q-多項式への正規化 $\{\hat{J}_K^{\mathfrak{g}}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考えることは出来るが, 一般にその" 極限" である $\mathfrak{g}$-tail が存在するかは知られていない.

Theorem ([Garoufalidis-Vuong, 2017]) K をトーラス結び目, $\mathfrak{g}$ をランク 2 の単純 Lie 代数とする. このとき, 任意の基本表現 λ に対して $\{\hat{J}_K^{\mathfrak{g}}(n\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は k-stable. $(k \in \mathbb{N})$

tail に関して得られた結果の紹介

■ **Theorem ([Y. 2018])** Anti-parallel な $(2, 2m)$-torus link $T_{\leftrightarrows}(2, 2m)$ に対して, $J_K^{\mathfrak{sl}_3}(k, 0)$ に関する二通りの明示式を与え, その $\mathfrak{sl}_3$-tail から以下の恒等式を得た.

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-2i} q^{m(i^2+2i)} \frac{(1-q^{i+1})^3(1+q^{i+1})}{(1-q)^2(1-q^2)}$$

$$= \frac{(q)_\infty}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0} \frac{q^{-2k_m} q^{\sum_{i=1}^m k_i^2 + 2k_i}}{(q)_{k_1-k_2}(q)_{k_2-k_3} \cdots (q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}^2}$$

■ **Remark** 左辺は [Bringmann-Kaszian-Milas, 2019] の $\mathfrak{sl}_3$ false theta series の"diagonal summand" と一致する.

■ **Theorem ([Y. 2020])** Parallel な $(2, 2m)$-torus link $T_{\rightrightarrows}(2, 2m)$ のに対して, $\mathfrak{sl}_2$-tail と $\mathfrak{sl}_3$-tail は有理関数の差を除いて一致する.

■ **Theorem ([Y. 2020])** "minus-adequate" な向き付き絡み目 K に対して, 一行色付きジョーンズ多項式の極限 $\mathcal{T}_K^{\mathfrak{sl}_3}(q)$ が存在する.

結び目図式による結び目の定義

- 絡み目とは

> $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $\sqcup^l S^1$ の全域 isotopy 類.

- 絡み目図式とは

> $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $\sqcup^l S^1$ の $\mathbb{R}^2$ への generic な射影に交点における上下情報を付加した図.

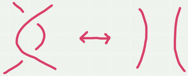
■ **Remark** l を絡み目の成分数といい, 特に $l = 1$ のときに結び目と呼ぶ. S^1 をアニュラス $S^1 \times [0,1]$ に置き換えたものを枠付き絡み目と呼ぶ.

- 絡み目図式と絡み目の対応

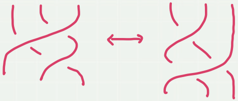
> 絡み目図式 D_1 と D_2 が Reidemeister move の列と $\mathbb{R}^2$ の isotopy で移り合うなら, D_1 を絡み目図式にもつ絡み目と D_2 を絡み目図式にもつ絡み目は一致する.

(R1)

(R2)

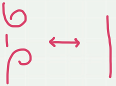


(R3)



framed : (R1)を (R0) に replace

(R0)



枠付き結び目の量子不変量

- 結び目の量子不変量 (色付きジョーンズ多項式) の定義
  1. 表現圏を用いた定義,
  2. 結び目図式を用いた定義,
  3. その他いろいろ
- 表現圏を用いた量子不変量の構成 (概要)
  - strict なリボン圏 $\mathcal{C}$ を固定すると, $\mathcal{C}$ の対象で色付けしたタングル図式の圏から $\mathcal{C}$ への函手 $F_{\mathcal{C}}$ が一意に存在する.
  - $c \in \mathcal{C}$ で色付けられた絡み目 L_c は単位対象から単位対象への射なので, 不変量 $F_{\mathcal{C}}(L_c) \in \mathrm{End}(\mathbf{1})$ が得られる.
  - 特に, $\mathcal{C}$ を量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の圏とすると $F_{\mathcal{C}}(L_c)$ として色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式が得られる.
- 線形スケイン理論を用いた量子不変量の構成 (概要)
  - 結び目 L の結び目図式 D_L を描き, "Jones-Wenzl 射影子" を乗せる.
  - " スケイン関係式" によって交点を持たない図式の線形和 $D_L = \sum_i D_i$ に分解する.
  - 各 D_i の"elliptic face" をスケイン関係式で消していくと空の図式 $\emptyset$ となる.
  - 以上の操作で $D_L = f_L(q)\emptyset$ となり, 得られた多項式 $f_L(q)$ が色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式が得られる.

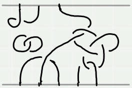
表現圏を用いた量子不変量の構成

a **(k,ℓ)-tangle diagram**

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a generic immersion of arcs & loops into $\mathbb{R}\times[0,1]$

s.t. • intersection point $=$ ╳

• $\partial\{\text{arcs}\} = \{(1,0),(2,0),\dots,(k,0)\}$
$\cup\ \{(1,1),(2,1),\dots,(\ell,1)\}$



$(5,3)$-tangle diagram

the set of **framed (k,ℓ)-tangles**

$:= \{(k,\ell)\text{-tangle diagram}\} \big/ (\Omega 0),(\Omega 2),(\Omega 3),\ \text{isotopy}$

Fix a strict ribbon category $\mathcal{C}$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{braiding} & c_{V,W} : V\otimes W \to W\otimes V \\ \text{duality} & \left\{\begin{array}{l} * : V \longrightarrow V^* \\ b_V : \mathbb{1} \longrightarrow V\otimes V^* \\ d_V : V^*\otimes V \to \mathbb{1} \end{array}\right. \\ \text{twist} & \theta_V : V \to V,\ \text{isom.} \end{array}\right]$$

a **category of $\mathcal{C}$-colored framed tangles $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$**

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Obj}\,\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$: a finite sequence of $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}\times\{+,-\}$

$\cup$ $\varnothing$: the empty sequence.

$\mathrm{Obj}\,\mathcal{T}_{\mathcal{C}} \ni \eta_1 = ((V_1,\varepsilon_1),(V_2,\varepsilon_2),\dots,(V_k,\varepsilon_k))$

$\eta_2 = ((W_1,\delta_1),(W_2,\delta_2),\dots,(W_\ell,\delta_\ell))$

$\mathrm{Mor}(\eta_1,\eta_2)$: an oriented framed (k,ℓ)-tangle

s.t. • each component is colored by $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$

•  if $\varepsilon_i = +$,  if $\varepsilon_i = -$

 if $\delta_j = +$,  if $\delta_j = -$

a category of $\mathcal{C}$-colored framed tangles $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$

- $\mathrm{Obj}\,\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$: a finite sequence of $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \times \{+,-\}$

  $\ni$ $\emptyset$: the empty sequence.

$$\mathrm{Obj}\,\mathcal{T}_{\mathcal{C}} \ni \eta_1 = ((V_1, \varepsilon_1), (V_2, \varepsilon_2), \dots, (V_k, \varepsilon_k))$$
$$\eta_2 = ((W_1, \delta_1), (W_2, \delta_2), \dots, (W_\ell, \delta_\ell))$$

- $\mathrm{Mor}(\eta_1, \eta_2)$: an oriented framed (k, ℓ)-tangle

  s.t. • each component is colored by $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$

  • 

 if $\varepsilon_i = +$, 

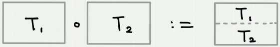
 if $\varepsilon_i = -$

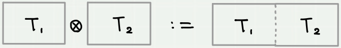
 if $\delta_j = +$, 

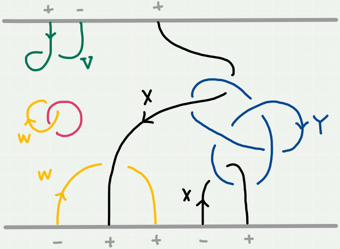
 if $\delta_j = -$

- composition



- tensor product



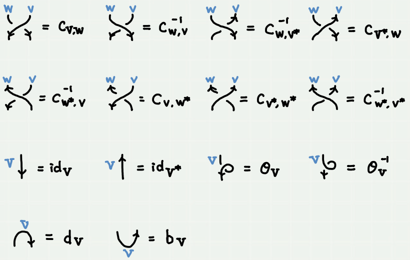


$\mathcal{C}$-colored $(5,3)$-tangle diagram

Theorem[Reshetikhin-Turaev, 1990]

$\exists ! \, F_{\mathcal{C}} : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$, a $\otimes$-preserving functor

s.t. $F((V,+)) = V$, $F((V,-)) = V^*$



$\rightsquigarrow L$: an $\mathcal{C}$-colored framed link.

$\Rightarrow F_{\mathcal{C}}(L) \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$

e.g (the colored $\mathfrak{g}$ Jones polynomial)

$\mathfrak{g}$: a simple Lie algebra

$\mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g})$: the category of finite dimensional representations of the quantum group $U_q(\mathfrak{g})$. ($q = $ "q^2" : a formal variable)

$\mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}$

$L = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_\ell$: a framed link

$V_i \in \mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g})$ is a coloring of L_i

the $(\mathfrak{g}, (V_1, \ldots, V_\ell))$-colored Jones polynomial

$J^{\mathfrak{g}}_L(V_1, V_2, \ldots, V_\ell) \in \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2D}})$ is defined by

$$F_{\mathcal{C}}(L)(1) = J^{\mathfrak{g}}_L(V_1, V_2, \ldots, V_\ell) \cdot 1$$

(※ D is determined by $\mathfrak{g}$)

線形スケイン理論を用いた量子不変量の構成

$\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g})$

$\mathcal{T}_\mathcal{C}$ = $\mathcal{C}$-colored framed tangles

$$\mathcal{T}_\mathcal{C} \xrightarrow{F_\mathcal{C}} \mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g})$$

"≅"

$\boxed{\text{diagrammatic category}}$

linear skein theory

① Temperley-Lieb category

Web

② Quantum spin network

trivalent graph

+ quantum 6j symbol

"Linear skein theory"

= a functor from $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ to a diagrammatic representation of $\mathrm{Fun}\,\mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g})$

or $\mathrm{Kar}(\mathrm{Fun}\,\mathrm{Rep}_f U_q(\mathfrak{g}))$

the Kauffman bracket ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$)

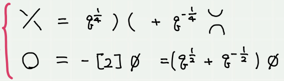
$| = |^{1} = |\ V_2 \cong V_2^*$

the 2-dim. irreducible rep.

$|^{n} = \underbrace{||\cdots|}_{n} = |\ V_2 \otimes \cdots \otimes V_2$

the Kauffman bracket ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$)

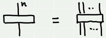
skein relation



- construction of the color V_{n+1}

= the Jones - Wenzl projector

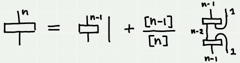
i.e.



Diagramatic definition

$$\left([n] = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)$$

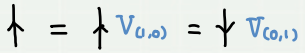
V_{n+1} :



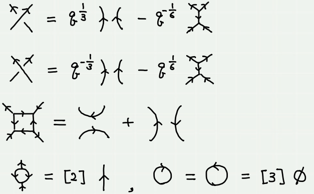
$\rightsquigarrow$ $K =$ 

then,  $= J^{\mathfrak{sl}_2}_{K,n}(q)\ \emptyset$

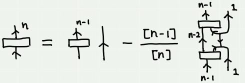
the A_2 bracket ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$)



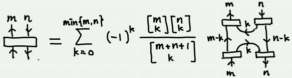
skein relation

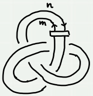


$V_{(n,0)}$:



$V_{(m,n)}$:

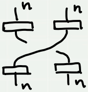


$\longrightarrow$  $= J^{\mathfrak{sl}_3}_{K,(m,n)}(q)\ \emptyset$

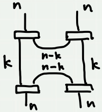
Example (時間があれば計算例)

ツイスト公式 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合)

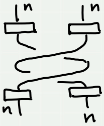
Theorem[Yamada, 1989]



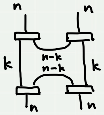
$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{1}{4}(-n^2+2k)} \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}$$



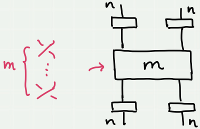
Theorem[Masbaum, 2003]



$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\frac{1}{2}(-n^2-n+2k^2+k)} \frac{(q)_n^2}{(q)_k^2 (q)_{n-k}}$$

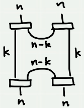


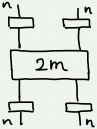
Theorem[Y. 2017]



$$= (-1)^{n-k_m} q^{\frac{n-k_m}{2}} \sum_{n\geq k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m\geq 0} (-1)^{\sum_{i=1}^{m} k_i} q^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+k_i)}$$

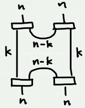
$$\times \frac{(q)_n}{(q)_{n-k_1}(q)_{k_1-k_2}\cdots(q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}}$$





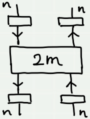
$$= q^{-\frac{m}{2}(n^2+2n)} \sum_{n\geq k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m\geq 0} (-1)^{n-k_m} q^{\frac{n-k_m}{2}} q^{\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+k_i)}$$

$$\times \frac{(q)_n^2}{(q)_{n-k_1}(q)_{k_1-k_2}\cdots(q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}^2}$$

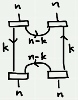


ツイスト公式 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \lambda = (n, 0)$ の場合)

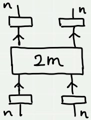
Theorem[Y. 2017] (anti-parallel case)



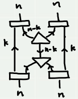
$$= q^{-\frac{2m}{3}(n^2+3n)} \sum_{n \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0} q^{n-k_m} \, q^{\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+2k_i)} \times \frac{(q)_n^2}{(q)_{n-k_1}(q)_{k_1-k_2}\cdots(q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}^2}$$

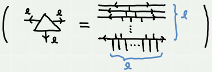


Theorem[Y. 2020]

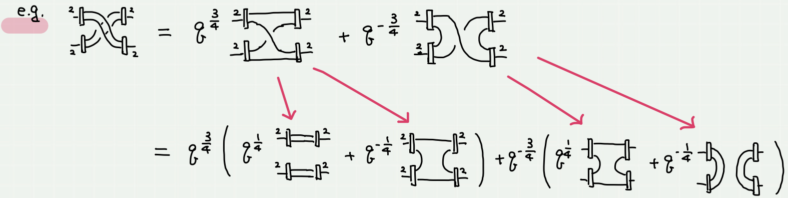


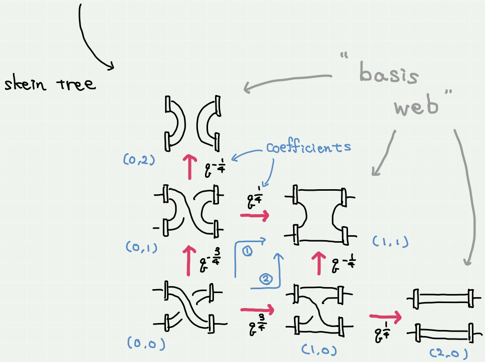
$$= q^{-\frac{m}{3}(n^2+3n)} \sum_{n \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0} q^{\frac{n-k_m}{2}} \, q^{\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+k_i)} \times \frac{(q)_n^2}{(q)_{n-k_1}(q)_{k_1-k_2}\cdots(q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}^2}$$





ツイスト公式の格子の経路を用いた証明方法





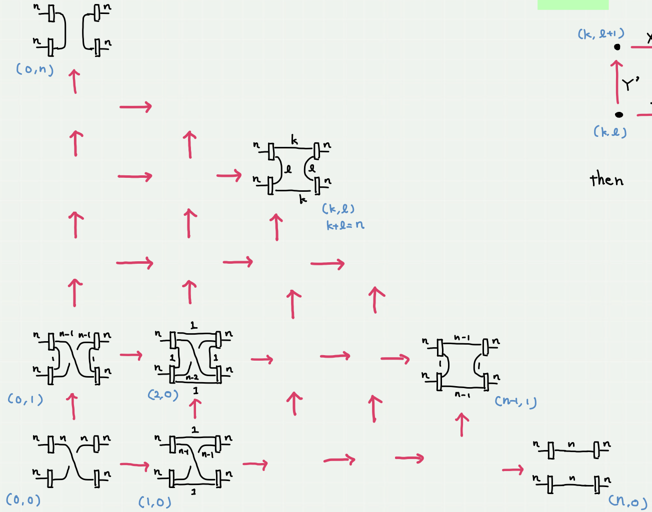
coefficent of basis web on (1,1)

$$= \sum_{\substack{\gamma:\ \text{paths from} \\ (0,0)\ \text{to}\ (1,1)}} \prod_{w:\ \text{coeff. on}\ \gamma} w$$

$$= \underbrace{q^{-\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{4}}}_{①} + \underbrace{q^{\frac{3}{4}} q^{-\frac{1}{4}}}_{②}$$

$\times q$

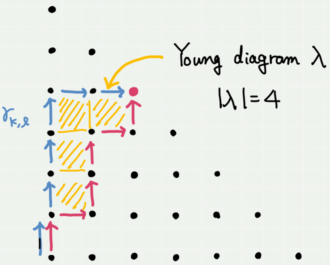
(half twist formula)

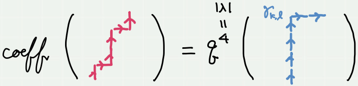


Lemma

$$\begin{tikzcd} (k, l+1) \arrow[r, "X'"] & (k+1, l+1) \\ (k, l) \arrow[u, "Y'"] \arrow[r, "X"] & (k+1, l) \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

then $XY = \xi\, Y'X'$





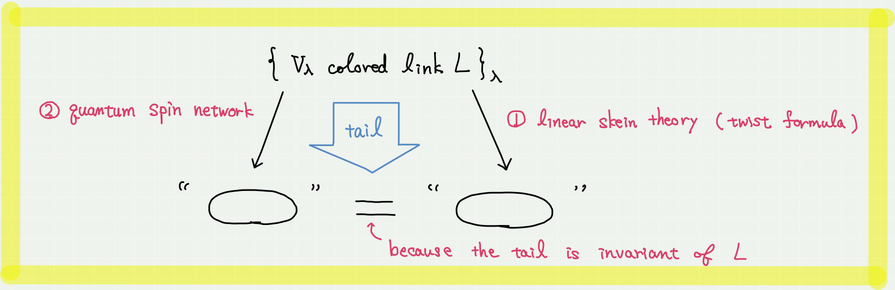
◎ coefficient of (k,l) $\quad (k+l=n)$

$$= \sum_{\substack{\gamma:\ \text{path from} \\ (0,0)\ \text{to}\ (k,l)}} \ \prod_{\substack{w:\ \text{weight} \\ \text{on}\ \gamma}} w$$

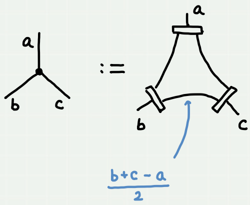
$$= \Bigg(\prod_{\substack{w:\ \text{weight} \\ \text{on}\ \gamma_{k,l}}} w \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{\lambda:\ \text{Young diagram} \\ \#\,\text{row} \le k \\ \#\,\text{column} \le l}} q^{|\lambda|} \Bigg)$$

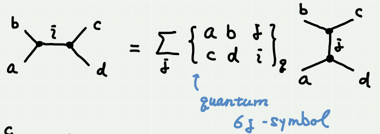
$$= \Bigg(\prod_{\substack{w:\ \text{weight} \\ \text{on}\ \gamma_{k,l}}} w \Bigg) \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}$$

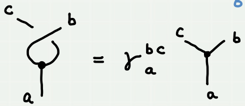
結び目の tail と q-級数の恒等式



② quantum spin network $(\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2)$







(false) theta series に関する Andrews-Gordon 型の恒等式

- $f(a,b) := \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}}$: the theta series
- $\Psi(a,b) := \sum_{i=0}^{\infty} a^{\frac{i(i+1)}{2}} b^{\frac{i(i-1)}{2}} - \sum_{i=1}^{\infty} a^{\frac{i(i-1)}{2}} b^{\frac{i(i+1)}{2}}$: the false theta series

Theorem[Armond-Dasbach, 2011]

$$f(-q^{2m}, -q)/(1-q) = J^{sl_2}_{T(2,2m+1)}(q) = \frac{(q)_\infty}{1-q} \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{m-1} \geq 0} \frac{q^{\sum_{i=1}^{m-1} k_i^2 + k_i}}{(q)_{k_1-k_2} (q)_{k_2-k_3} \cdots (q)_{k_{m-2}-k_{m-1}} (q)_{k_{m-1}}}$$

Theorem[Hajij, 2015]

$$\Psi(q^{2m-1}, q)/(1-q) = J^{sl_2}_{T(2,2m)}(q) = \frac{(q)_\infty}{1-q} \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0} \frac{q^{-k_m} q^{\sum_{i=1}^{m} k_i^2 + k_i}}{(q)_{k_1-k_2} (q)_{k_2-k_3} \cdots (q)_{k_{m-1}-k_m} (q)_{k_m}^2}$$

Theorem[Y. 2018]

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-2i}\, q^{m(i^2+2i)} \frac{(1-q^{i+1})^3(1+q^{i+1})}{(1-q)^2(1-q^2)} = J^{\mathfrak{sl}_3}_{T_{\leftrightarrows}(2,2m)}(q)$$

$$= \frac{(q)_\infty}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m\geq 0} \frac{q^{-2k_m}\, q^{\sum_{i=1}^{m} k_i^2+2k_i}}{(q)_{k_1-k_2}(q)_{k_2-k_3}\cdots(q)_{k_{m-1}-k_m}(q)_{k_m}^2}$$

Theorem[Y. 2020]

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{T_{\leftrightarrows}(2,2m+1)}(q) = \frac{f(-q^{2m},-q)}{(1-q)^2(1-q^2)} \qquad J^{\mathfrak{sl}_3}_{T_{\leftrightarrows}(2,2m)}(q) = \frac{\Psi(q^{2m-1},q)}{(1-q)^2(1-q^2)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{J^{\mathfrak{sl}_3}_{T_{\leftrightarrows}(2,m)}(q) = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)} J^{\mathfrak{sl}_2}_{T(2,m)}(q)}$$

Fin.